Школа № 444

Вступительная работа в 5 класс. Второй тур.

Продолжительность работы — 60 минут. Решать задачи можно в любом порядке.

Задача 1. У Гарри Поттера есть песочные часы на 5 минут и на 4 минуты. Ему нужно опустить яйцо гиппогрифа в кипящую воду ровно на 7 минут. Составьте алгоритм действий Гарри.

Решение.

- Гарри одновременно запускает часы.
- Через 4 минуты песок в меньших часах останавливается и Гарри их переворачивает.
- Ещё через $5 - 4 = 1$ минуту песок в больших часах заканчивается и Гарри их переворачивает.
- Ещё через $4 - 1 = 3$ минуты снова заканчивается песок в меньших часах. Гарри опускает яйцо в воду.
- Ещё через $5 - 3 = 2$ минуты заканчивается песок в больших часах. Гарри их переворачивает.
- Ещё через пять минут большие часы снова останавливаются. Гарри вынимает яйцо. Оно варилось $2 + 5 = 7$ минут.

□

Задача 2. За время бала каждый кавалер протанцевал с шестью дамами, а каждая дама протанцевала с тремя кавалерами. Кого на балу было больше — дам или кавалеров? Во сколько раз?

Ответ: Дам больше в два раза.

Решение. Пусть во время каждого танца кавалер дарит даме розу. Тогда общее число роз в три раза больше, чем число дам и в шесть раза больше, чем число кавалеров. Значит, дам в два раза больше, чем кавалеров. □

Задача 3. Васе и Пете дали по карточке, на каждой из которых было написано одно и то же число. Вася стер на своей карточке последнюю цифру, а Петя стер на своей карточке первую цифру. Оказалось, что теперь у Васи число в два раза больше, чем у Пети. Чему могло быть равно исходное число, если известно, что оно

(a) четырехзначное;
(b) пятизначное?

Ответ: Подходит любое из чисел **(a)** 8421, 5263, 2105, 7368; **(b)** 42105, 10526, 73684.

Задача 4. Аня склеила из 125 одинаковых кубиков куб $5 \times 5 \times 5$. Но пока она несла его из школы домой, несколько кубиков, находившихся в наружном слое, отклеились и потерялись. Какая наибольшая площадь поверхности могла оказаться у полученной фигуры?

Ответ: 294.

Решение. Оценка. Всего во внешнем слое находится $125 - 27 = 98$ кубиков. У них $6 \cdot 25 = 150$ граней находятся на поверхности исходного куба (будем называть их «внешними»), $6 \cdot 9 = 54$ грани соприкасаются со внутренним слоем (будем называть их «внутренними»). Остальные $(98 \cdot 6 - 150 - 54) : 2 = 192$ грани отделяют кубики внешнего слоя друг от друга. Итого потенциально в состав площади поверхности могут войти $150 + 54 + 192 = 396$ граней.

Рассмотрим два соседних кубика, прилегающих к ребру большого куба. Если мы сохраним их оба, то разделяющая их грань не будет учитываться при подсчете площади поверхности. Если удалим один из них, то потеряем его «внешнюю» грань. При этом всего мы потеряем по меньшей мере 48 маленьких граней (по 8 на каждой из 6 граней большого куба). Также если на поверхности фигуры окажется какая–то из «внутренних» граней, то в состав площади поверхности не войдет «внешняя» грань, располагавшаяся «над ней». При этом мы потеряем еще не менее 54 маленьких граней. Итого площадь поверхности не может оказаться больше, чем $396 - 48 - 54 = 294$.

Пример. Теперь покажем, как достичь нужной площади поверхности. Раскрасим кубики во внешнем слое в шахматном порядке так, чтобы угловые кубики были черными. Затем удалим все белые кубики наружного слоя. В оставшейся фигуре будет 20 черных кубиков, у которых все шесть граней окажутся на поверхности фигуры (8 угловых и еще по одному на каждом из 12 ребер), и еще 30 черных кубиков, у которых на поверхности фигуры будет по 5 граней (по 5 кубиков на каждой из шести граней нашего куба). Кроме того, на поверхности полученной фигуры окажется еще 24 грани (по 4 на каждой из шести граней куба), относящихся к кубикам внутренних слоев. Итого площадь поверхности полученной фигуры будет равна $20 \cdot 6 + 30 \cdot 5 + 24 = 294$. □

Задача 5. На острове живут два племени — оптимисты и пессимисты. Оптимисты задают только такие вопросы, верным ответом на которые будет «Да». Пессимисты задают только такие вопросы, верным ответом на который будет «Нет». Однажды встретились трое островитян: Алекс, Боб и Карл.

- Может ли Боб спросить, является ли Карл пессимистом? — спросил Алекс.
- Может ли Карл спросить, принадлежим ли мы с Алексом к одному племени? — спросил Боб.
- Верно ли, что среди нас чётное число оптимистов? — спросил Карл.

Определите, к какому племени принадлежит каждый из них.

Ответ: Алекс и Карл — оптимисты, Боб — пессимист.

Решение. Сразу отметим, что каждый островитянин может спросить у любого своего соплеменника, является ли тот оптимистом. А у каждого человека другого племени он может спросить, является ли тот пессимистом.

Если Алек оптимист, то Боб **может** спросить, является ли Карл пессимистом. Это означает, что Боб и Карл принадлежат к разным племенам. Тогда всего оптимистов двое. Если Алек пессимист, то Боб **не может** спросить, является ли Карл пессимистом. Это означает, что Боб и Карл принадлежат к одному племени. Тогда либо все трое пессимисты, либо оптимистов двое — Боб и Карл.

Итак, в любом случае число оптимистов четно. Значит, Карл — оптимист.

Если Боб оптимист, то Карл **может** спросить, принадлежат ли Алекс и Боб к одному племени. Тогда, поскольку Карл оптмист, то так оно и есть, т.е. все трое оптимисты. Но мы уже установили, что оптимистов четное число. Значит, Боб пессимист. Тогда (в силу четности числа оптимистов), Алекс тоже оптимист.

Легко проверить, что найденный вариант подходит. Ответы на вопросы Алекса и Карла утвердительные, а на вопрос Боба — отрицательный. □